

מתמטיקה לביולוגים א

פרק 3 - חוקי החזקות והשורשים, משוואות ואי שוויונות מעריכיים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות..... 1
2. חוקי השורשים..... 5
3. משוואות מעריכיות..... 8
4. משוואות עם חיבור וחסור איברים..... 9
5. משוואות עם קבוע אוילר..... 11
6. אי שוויונים מעריכיים..... 12

חוקי החזקות

סיכום כללי

סיכום חוקי החזקות

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

שאלות

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} & \text{ב.} \quad \frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} & \\
 \text{ג.} \quad \frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} & \text{ד.} \quad 2^3 + 2^5 &
 \end{array}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$

(5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ב. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ג. $\frac{((3^4)^4)^5}{81^3 27^4 3^5}$
---	--------------------------------------	--

(6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$	ד. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$

(7) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

א. $(a^2 b)^3$	ב. $(m^4 n^3)^5$	ג. $(x^{12} y^3)^3$
ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$	ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$	ו. $\left(\frac{a^{14} b^4}{a^6 ab^3}\right)^3$
ז. $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$	ח. $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$	ט. $\left(\frac{(b^{12} c)^2 c^{14}}{c(c^3 b^5)^4 b^3}\right)^2$

(8) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

א. $\frac{1}{4^6}$	ב. $\frac{1}{5^3}$	ג. $\frac{1}{2^{10}}$
ד. $\frac{1}{8}$	ה. $\frac{1}{81}$	ו. $\frac{1}{125}$

(9) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

א. $\frac{1}{4^{-3}}$	ב. $\frac{1}{3^{-2}}$	ג. $\frac{1}{5^{-3}}$
-----------------------	-----------------------	-----------------------

(10) חשב את הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$	ב. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$
--	--

(11) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$	ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$	ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$
---	---	---

(12) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$	ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$
---	---	---

תשובות סופיות

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
- ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (4) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
- ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18}
- (5) א. 2^{12} ב. 2^7 ג. 3^{51}
- (6) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (7) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (8) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (9) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (10) א. 1000 ב. 3
- (11) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (12) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים

סיכום כללי

סיכום חוקי השורשים

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות

(1) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(3) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $8^{\frac{2}{3}}$	ב. $32^{\frac{3}{5}}$	ג. $128^{\frac{2}{7}}$
ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$	ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$	ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$
ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$	ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$	ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$
ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$	ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$	ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

(5) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$	ב. $5\sqrt{3}$	ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$
ד. $2\sqrt[3]{3}$	ה. $x\sqrt{x}$	

(6) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

א. $2\sqrt{5}$	ב. $4\sqrt[3]{2}$	ג. $2\sqrt[5]{3}$
ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$	ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$
ז. $-5\sqrt[3]{2}$	ח. $-5\sqrt[4]{2}$	ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

(7) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

א. $\sqrt{12}$	ב. $\sqrt{48}$	ג. $\sqrt{63}$
ד. $\sqrt[3]{54}$	ה. $\sqrt{x^5}$	

(8) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

א. $\sqrt{40}$	ב. $\sqrt{50}$	ג. $\sqrt{320}$
ד. $\sqrt[3]{108}$	ה. $\sqrt[3]{56}$	ו. $\sqrt[5]{160}$
ז. $\sqrt[4]{162}$	ח. $\sqrt[6]{972}$	ט. $\sqrt[6]{192}$

תשובות סופיות

(1) א. $\sqrt[4]{3}$	ב. $\sqrt[5]{2^3}$	ג. $\sqrt[6]{6^5}$	ד. $-\sqrt[7]{12^2}$	ה. $-\sqrt[3]{-4}$	ו. ϕ
ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$	ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$			
(2) א. 7	ב. -5	ג. 2	ד. -2	ה. 4	ו. 16
ז. -27	ח. ϕ	ט. ϕ	י. 5		
(3) א. 4	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{1}{4}$	ד. 125	ה. $\frac{32}{243}$	ו. $\frac{49}{16}$
ז. $\frac{27}{4}$	ח. $\frac{10}{49}$	ט. $\frac{1}{2}$			
(4) א. 4	ב. 9	ג. 20	ד. 6	ה. 3	ו. 2
ז. $\sqrt{2}$	ח. $\sqrt{5}$	ט. $\sqrt{2}$			
(5) א. $\sqrt{18}$	ב. $\sqrt{75}$	ג. $\sqrt{9}$	ד. $\sqrt[3]{24}$	ה. $\sqrt{x^3}$	
(6) א. $\sqrt{20}$	ב. $\sqrt[3]{128}$	ג. $\sqrt[5]{96}$	ד. $\sqrt{6}$	ה. $\sqrt[3]{3}$	
ו. $\sqrt[4]{40 \frac{1}{2}}$	ז. $\sqrt[3]{-250}$	ח. $-\sqrt[4]{1250}$	ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$		
(7) א. $2\sqrt{3}$	ב. $4\sqrt{3}$	ג. $3\sqrt{7}$	ד. $3\sqrt[3]{2}$	ה. $x^2\sqrt{x}$	
(8) א. $2\sqrt{10}$	ב. $5\sqrt{2}$	ג. $8\sqrt{5}$	ד. $3\sqrt[3]{4}$	ה. $2\sqrt[3]{7}$	ו. $2\sqrt[5]{5}$
ז. $3\sqrt[4]{2}$	ח. $3\sqrt[5]{4}$	ט. $2\sqrt[6]{3}$			

משוואות מעריכיות יסודיות

סיכום כללי

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ב. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$

ג. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

(2) פתור את המשוואה הבאה (הבסיס הוא שבר): $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ג. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

תשובות סופיות

(1) א. $x = -\frac{1}{3}$ ב. $x = -4$ ג. $x = 1, -\frac{1}{5}$

(2) $x = \frac{1}{5}$

(3) א. $x = -\frac{1}{2}$ ב. $x = -8$ ג. $x = 2, -\frac{2}{3}$

משוואות עם חיבור וחסור איברים

סיכום כללי

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$ ב. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$ ב. $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

א. $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$ ב. $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

(4) פתור את המשוואה הבאה (משוואות כלליות): $\frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$ ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$

תשובות סופיות

(1) א. $x = 3$ ב. $x = 4$

(2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 0$

(3) א. $x = 2, 3$ ב. $x = 1, -2$

(4) $x = 1, -\frac{1}{2}$

(5) א. $x = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ ב. $x = 1, 3$

משוואות עם קבוע אוילר

סיכום כללי

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לזו של משוואה מעריכית רגילה, כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x} = e^{2x-1}$

ב. $e^{x-5} = (e^{1-x})^3$

(2) פתור את המשוואה הבאה (עם חיבור וחסור): $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

(3) פתור את המשוואה הבאה (המשתנה גם בבסיס): $xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x$.

תשובות סופיות

(1) א. $x = -1$ ב. $x = 2$

(2) $x = 0$

(3) $x = 0, \frac{1}{4}$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x} \quad (2)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (3)$$

הערה

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ($\ln$) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (2)$$

$$0 < x < 1 \quad (3)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (4)$$